

Беседа 10

1 Геометрическое описание свободного 4-D гироскопа в механике Декарта

В Беседе 6 было дано геометрическое описание свободного 4-D гироскопа в рамках классического подхода. Было показано, что описание движения элементов 4-D гироскопа происходит согласно уравнениям геодезических конфигурационного пространства с трансляционной римановой метрикой

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = \frac{2T}{M+2m} dt^2, \quad i, j = 1, 2$$

где $g_{ij} = g_{ij}(x^i)$ - метрический тензор локального пространства

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}, \quad (1)$$

t - время, T - функция Лагранжа 4-D гироскопа, которую можно представить в виде

$$T = \frac{M+2m}{2} (v_c^2 + k^2(1 - k^2 \sin^2 \phi)w^2) = \frac{M+2m}{2} (v_c^2 + g'w^2), \quad (2)$$

где

$$w = r\omega, \quad k^2 = 2m/(M+2m), \quad v_c = v - k^2w \sin \phi, \quad g' = k^2(1 - k^2 \sin^2 \phi) = k^2g.$$

Используя обозначения

$$x^1 = x_c, \quad x^2 = r\phi = \phi', \quad v^1 = v_c, \quad v^2 = w$$

и метрический тензор (1) можно представить уравнения геодезических риманова конфигурационного пространства

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \\ i, j, k = 1, 2$$

в виде

$$\frac{dv_c}{dt} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} w^2 = 0. \quad (4)$$

Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} = -\frac{1}{r} \frac{k^2 \sin \phi \cos \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi},$$

то уравнение (4) принимает вид

$$\dot{\omega} - \frac{k^2 \omega^2 \cos \phi \sin \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} = 0.$$

Интегрируя полученные уравнения, имеем

$$v_c = \text{const}, \quad \omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi_0}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}.$$

Эти формулы совпадают с формулами (23) и (18) Беседы 2, т.е. описывают движение свободного четырехмерного гироскопа, с центром масс которого связана ускоренная локально инерциальная система отчета второго рода, при этом на центр масс действуют скомпенсированные силы инерции. В этом случае центр масс свободного гироскопа покоится или движется равномерно и прямолинейно.

1.1 4-D гироскоп с учетом кручения Риччи конфигурационного пространства

Предположим, что на центр масс гироскопа действуют нескомпенсированные силы инерции - торсионные силы. Для описания этой ситуации в Беседе 2 мы ввели уравнения движения (25) и (26), которые записываются как

$$\frac{dv}{dt} - B \frac{d}{dt} (\omega \sin \phi) = B \Phi \omega, \quad (5)$$

$$r \frac{d\omega}{dt} - \frac{dv}{dt} \sin \phi = -\Phi v. \quad (6)$$

Покажем, что функция Φ , в этих уравнениях порождена кручением Риччи и играет важную роль при описании движения 4-D гироскопа.

Умножим уравнение (5) на $\sin \phi$ и сложим его с уравнением (6). В результате получим

$$r \frac{d\omega}{dt} - B(\omega^2 \sin \phi \cos \phi) = -\Phi(v - B\omega \sin \phi). \quad (7)$$

Используя формулу (21) Беседы 2

$$v = v_c + B\omega \sin \phi,$$

запишем уравнения (5) и (7) в виде

$$\frac{dv_c}{dt} = B\Phi\omega, \quad (8)$$

$$rg \frac{d\omega}{dt} - B(\omega^2 \sin \phi \cos \phi) = -\Phi v_c, \quad (9)$$

где

$$g = 1 - k^2 \sin^2 \phi.$$

Покажем теперь, что уравнения (8) и (9) следуют из уравнений геодезических конфигурационного пространства абсолютного параллелизма

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + 2g^{im} \Omega_{m(jk)} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad (10)$$

$$i, j, k = 1, 2$$

где Ω_{ki}^j - кручение Риччи, порожаемое (согласно Э.Картану) вращением масс внутри системы. Для вывода этих уравнений движения мы должны использовать обобщенные уравнения Лагранжа вида

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial T}{\partial u^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} + 2\Omega_{ki}^j \frac{\partial T}{\partial u^j} u^k = 0.$$

Доказательство этого утверждения дано в математической части книги "Теория физического вакуума." Поэтому мы здесь ограничимся только словесным утверждением, что обобщенные уравнения Лагранжа позволяют вывести уравнения движения механики Декарта (обобщенные уравнения Френе), а не уравнения механики Ньютона.

Ведем в каждой точке пространства неголономную ортогональную диаду e_i^a , через которую метрический тензор можно представить в виде

$$g_{ij} = \Lambda_{ab} e_i^a e_j^b,$$

где

$$\Lambda_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ортогональная диада для данного метрического тензора, связанная с переменными $V_c(t)$ и $g'\Omega(t)$ (см. Беседа 6)

$$V_c(t) = \cos \eta(t), \quad \sqrt{g'}\Omega(t) = \sin \eta(t), \quad (11)$$

имеет вид

$$e_i^a(\eta(t)) = \begin{pmatrix} \cos \eta & \sqrt{g'} \sin \eta \\ -\sin \eta & \sqrt{g'} \cos \eta \end{pmatrix},$$

$$e_a^i(\eta(t)) = \begin{pmatrix} \cos \eta & -\sin \eta \\ \frac{1}{\sqrt{g'}} \sin \eta & \frac{1}{\sqrt{g'}} \cos \eta \end{pmatrix}.$$

По известной диаде мы можем рассчитать связность абсолютного параллелизма двумерного пространства и найти уравнения геодезических пространства абсолютного параллелизма

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Delta^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad (12)$$

эквивалентные уравнениям (10).

По определению, связность абсолютного параллелизма вычисляется как

$$\Delta^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i_{jk} = e^i_a e^a_{j,k}.$$

Используя полученные выше соотношения, имеем

$$\Delta^1_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{g'} \frac{d\eta}{d\phi'} \end{pmatrix},$$

$$\Delta^2_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\eta}{d\phi'} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} \end{pmatrix}.$$

Соответственно, для компонент коэффициентов вращения Риччи, получим

$$T^1_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{g'} \frac{d\eta}{d\phi'} \end{pmatrix} = T^1_{22} = -T^2_{12},$$

$$T^2_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\eta}{d\phi'} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^2_{11}.$$

Отличные от нуля компоненты кручения Риччи запишутся как

$$\Omega^2_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2g'} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} \sin \eta \cos \eta \\ \frac{1}{2g'} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} \sin \eta \cos \eta & 0 \end{pmatrix} = \Omega^2_{12}.$$

Расписывая уравнения (12), получим

$$\frac{d^2 x^1}{ds^2} + T^1_{22} \left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2 x^2}{ds^2} + \Gamma^2_{22} \left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 + 2\Omega^2_{12} \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^2}{ds} = 0$$

или

$$\frac{d^2 x_c}{ds^2} + \sqrt{g'} \frac{d\eta}{d\phi'} \Omega^2 = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d^2 \phi'}{ds^2} - \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\eta}{d\phi'} \Omega V_c + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} \Omega^2 = 0, \quad (14)$$

Здесь $\eta(\phi')$ -угловая переменная диады.

Производя вычисления, находим

$$\frac{d^2 x_c}{ds^2} = -\sqrt{g'} \frac{d\eta}{d\phi'} \Omega^2, \quad (15)$$

$$\frac{d^2 \phi'}{ds^2} + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} \Omega^2 = \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\eta}{d\phi'} \Omega V_c \quad (16)$$

или

$$\frac{dv_c}{dt} = -\sqrt{g'} \frac{d\eta}{dt} w, \quad (17)$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} w^2 = \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\eta}{dt} v_c, \quad (18)$$

где

$$g' = k^2(1 - k^2 \sin^2 \phi).$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (3) и (4) можно увидеть в правой части уравнений (17) и (18) дополнительные члены, которые порождены кручением Риччи Ω_{jk}^i .

1.2 Торсионные силы в 4-D гироскопе

Введем обозначение

$$\Phi(t) = -\frac{\sqrt{g'}}{k^2} \frac{d\eta}{dt}, \quad (19)$$

тогда уравнения (17) и (18) принимают вид

$$\frac{dv_c}{dt} = B\Phi\omega, \quad (20)$$

$$\frac{d\omega}{dt} - k^2\omega^2 \frac{\sin \phi \cos \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} = -\frac{1}{rg} \Phi v_c, \quad (21)$$

что эквивалентно уравнениям (3) и (4). Напомним, что здесь $g = 1 - k^2 \sin^2 \phi$.

Из уравнений (20) и (21) видно, торсионные силы связывают между собой угловое ускорение $\dot{\omega}$ и "поступательное" ускорение центра масс гироскопа \dot{v}_c . В самом деле, подставляя в уравнение (21) функцию Φ из уравнения (20), имеем

$$\dot{\omega} - k^2\omega^2 \frac{\sin \phi \cos \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} = -\frac{\dot{v}_c v_c}{B\omega r g}.$$

Из этой формулы видно, что всякое изменение углового ускорения $\dot{\omega}$ вызывает изменение ускорения центра масс \dot{v}_c .

Введем обозначение

$$w^* = r\omega\sqrt{g'}.$$

тогда уравнения движения (17) и (18) запишутся как

$$\dot{v}_c = k^2 \frac{\Phi}{\sqrt{g'}} w^*, \quad (A')$$

$$\dot{w}^* = -\frac{\Phi}{\sqrt{g'}} v_c. \quad (B')$$

Умножая уравнение (A') на $M + 2m$, а уравнение (B') на $2m$, получим

$$\dot{p} = \frac{\Phi}{\sqrt{g'}} q, \quad \dot{q} = -k^2 \frac{\Phi}{\sqrt{g'}} p,$$

где

$$p = (M + 2m)v_c, \quad q = 2m\omega^*.$$

Поскольку

$$\dot{p}q = \frac{\Phi}{\sqrt{g'}}q^2, \quad \dot{q}p = -k^2\frac{\Phi}{\sqrt{g'}}p^2,$$

то мы имеем следующий коммутатор

$$\dot{p}q - \dot{q}p = \frac{\Phi}{\sqrt{g'}}(q^2 + k^2p^2) = \frac{4m\Phi}{\sqrt{g'}}T, \quad (22)$$

где T - полная энергия 4-D гироскопа.

Из этой формулы следует, что ускорение центр масс 4-D гироскопа \dot{v}_c не зависит от углового ускорения $\dot{\omega}$ только в том случае, когда кручение Риччи $\Omega^{\cdot i}_{jk}$ и, следовательно, функция Φ равны нулю.

2 Пространственно-временная прецессия 4-D гироскопа

Формула (22) интересна еще и тем, что она предсказывает пространственно-временную прецессию свободного от внешних сил 4-D гироскопа. Во время такой прецессии внешний наблюдатель должен видеть периодическое изменение скорости центра масс свободного 4-D гироскопа. Совершенно очевидно, что это явление выходит за рамки классической механики, основанной на механике Ньютона. Научное объяснение этому явлению можно дать только в такой механике, где геодезическое движение - движение по инерции отличается от прямолинейного и равномерного геодезического движения механики Ньютона. Именно такой механикой является механика Декарта, в которой движение центра масс 4-D гироскопа происходит в соответствии с уравнениями геодезических пространства абсолютного параллелизма (12). Прежде чем исследовать пространственно-временную прецессию 4-D гироскопа, рассмотрим физику, описывающую пространственную прецессию 3-D гироскопа.

2.1 Пространственная прецессия 3-D гироскопа

В большинстве учебников по классической механике обходится вопрос, связанный с ускоренным движением по инерции, в том числе и ускоренное вращение по инерции малых элементов 3-D гироскопа

Рассмотрим, например, свободное вращение 3-D гироскопа. При вращении гироскопа с постоянной угловой скоростью ω на каждый его бесконечно малый элемент Δm , отстоящий на расстоянии l от оси вращения, действует центробежная сила инерции $f_{in} = -\Delta ml\omega^2$. Эта сила направлена от оси вращения гироскопа. С другой стороны, на этот же элемент действует сила упругости материала, из которого изготовлен 3-D гироскоп. Эта сила направлена в сторону оси вращения. Она равна по абсолютной величине силе инерции f_{in} и направлена в противоположную сторону, поэтому сумма силы инерции и силы упругости равна нулю.

Подобную ситуацию мы имеем в теории гравитации Эйнштейна, когда при

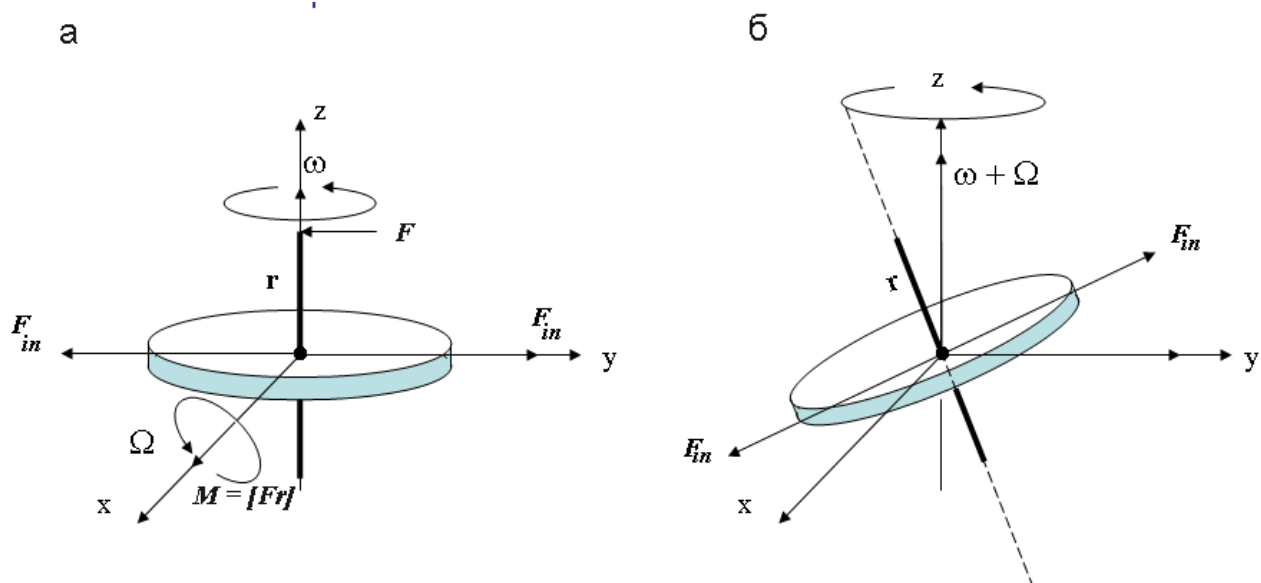


Рис. 1: Воздействие на 3-D гироскоп внешней силой \mathbf{F} (а); прецессия 3-D гироскопа после окончания действия внешней силы (б)

движении по геодезическим риманова пространства локально гравитационная сила скомпенсирована силой инерции. Поэтому с каждым бесконечно малым элементом Δm вращающегося 3-D гироскопа можно связать ускоренную локально лоренцову систему отсчета первого рода (см. Беседа 2). В данном случае, такая ускоренная система отсчета движется ускоренно, но по инерции, в соответствии с уравнениями геодезических пространства абсолютного параллелизма.

Предположим, что вдоль оси вращения гироскопа расположен стержень, жестко с ним связанный. Воздействуем на плечо \mathbf{r} стержня внешней силой \mathbf{F} (см. рис. 1а). Пусть, для определенности, внешняя сила \mathbf{F} действует в плоскости ZY против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора X. В этом случае возникающий момент $\mathbf{M}=[\mathbf{F}\mathbf{r}]$ направлен в положительном направлении оси X (правая система отсчета) и сюда же направлена угловая скорость Ω , созданная действием внешней силы \mathbf{F} . Реакция гироскопа на кратковременное действие внешней силы \mathbf{F} будет следующей:

1) возникнет гироскопический эффект, благодаря которому ось X, вдоль которой направлена угловая скорость Ω , будет стремиться совпасть с осью Z;

2) ось вращения гироскопа отклонится из своего первоначального положения в плоскости XZ и начнет прецессировать вокруг первоначального направления с частотой $\omega + \Omega$ (см. рис. 1б).

3) центр масс гироскопа останется на месте, если вся работа внешней силы \mathbf{F} будет совпадать с добавочной вращательной энергией прецессирующего гироскопа, порожденной частотой прецессии Ω .

Здесь я еще раз приведу слова специалиста по теории гироскопов К.Магнуса:

«Чтобы объяснить поведение вращающегося тела, часто проводят аналогию

между вращательным движением тела и движением материальной точки. Однако эта аналогия в теории гироскопа скорее вредна, чем полезна, так как область, в которой она справедлива, кончается как раз там, где начинаются типичные гироскопические явления.»

Что имел ввиду К.Магнус, говоря эти слова? Конечно же реакцию вращающегося 3-D гироскопа на внешнее воздействие. Это подтверждает другой известный специалист в теории 3-D гироскопов Р. Граммель. Для области гироскопических явлений, по выражению Р.Граммеля ¹,

« "анизотропия твердого тела, порождаемая его вращением", не имеет аналога в механике материальной точки. Если нанести удар по покоящейся материальной частице, она начинает двигаться в направлении ударного импульса. И, напротив, совсем не обязательно, чтобы приложение к покоящемуся телу ударного момента вызвало вращение тела именно вокруг той оси, относительно которой действовал момент».

Действительно, в рассмотренном нами случае ударный момент должен был вызвать вращение вокруг оси X, однако мы получили прецессию оси вращения гироскопа вокруг оси Z. Если теперь поместить прецессирующий гироскоп вдали от внешних сил, то он будет совершать это сложное вращательное движение сколь угодно долго, вращаясь по инерции.

Отличие механики вращающегося тела (механики ориентируемой точки) от механики точки, о котором говорят К.Магнус и Р.Граммель, связано с неголономностью угловых координат в механике Декарта (см. Беседа 7). Все гироскопические эффекты указывают на это. Трудность восприятия этого факта связана, видимо, с тем, что до сих пор в механике угловые координаты не входили в структуру пространственно-временного континуума и большинство ученых считает, что при нерелятивистском описании вращения материи достаточно использовать евклидово пространство механики Ньютона. Однако, механика Декарта утверждает, что общепринятая точка зрения ограничена и не позволяет правильно трактовать наблюдаемые гироскопические эффекты.

2.2 Прецессия свободного 4-D гироскопа в ct -х плоскости

Поскольку 4-D гироскоп вращается не только в пространстве, но и в пространственно-временных плоскостях, то, с позиций механики Ньютона, его прецессия выглядит просто невероятной. Действительно, прецессия вокруг пространственно-временной оси означает изменение скорости центра масс свободного 4-D гироскопа вокруг некоторого первоначального значения (см. рис. 2). Покажем это аналитически. Уравнения (A') и (B') можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{v}_c^* &= k^2 \Phi^* w, \\ \dot{w} &= -\Phi^* v_c^*. \end{aligned}$$

где

$$v_c^* = v_c - v_0, \quad \Phi^* = \frac{\Phi}{\sqrt{g'}},$$

¹ Специалист в теории гироскопов, написавший книгу «Гироскоп, его теория и применения», т. 1. т. 2, ИЛ, М., 1952, (*прим. автора*).

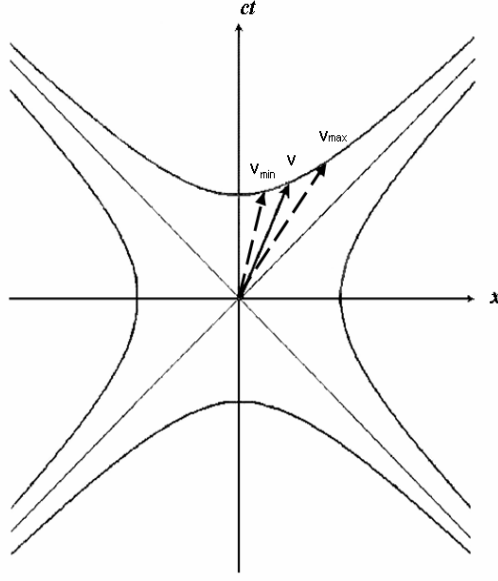


Рис. 2: Прецессия 4-D гироскопа в плоскости $ct - x$

и $v_0 = const$ - начальная скорость центра масс.

Предположим, что

$$\Phi^* = \kappa_0 = const.$$

Уравнения движения теперь принимают вид

$$\dot{v}_c^* = k^2 \kappa_0 w,$$

$$\dot{w} = -\kappa_0 v_c^*.$$

Продифференцируем первое уравнение и выразим угловое ускорение через v_c^*

$$\ddot{v}_c^* = k^2 \kappa_0 \dot{w} = -k^2 \kappa_0^2 v_c^*$$

или

$$\ddot{v}_c^* = -k^2 \kappa_0^2 v_c^*.$$

Решение этого уравнения запишется как

$$v_c^* = A \cos(k\kappa_0 t) + C \sin(k\kappa_0 t).$$

Так как при $t = 0$ скорость $v_c^* = 0$, то $A = 0$ и $C = v_0$, поэтому

$$v_c = v_0 \sin(k\kappa_0 t) + v_0 = v_0 (1 + \sin(k\kappa_0 t)). \quad (23)$$

Подставляя это решение в уравнение для угловой скорости и интегрируя его по времени, имеем

$$w = \frac{v_0}{k} \cos(k\kappa_0 t) + (w_0 - \frac{v_0}{k}).$$

Учитывая, что $w = \sqrt{g'}r\omega$, получим следующее выражение для угловой скорости

$$\omega = \frac{v_0}{\sqrt{g'}rk} \cos(k\kappa_0 t) + \frac{r\omega_0\sqrt{g'(\phi_0)} - v_0/k}{r\sqrt{g'}}.$$

Классическое решение получаем при $v_0 = 0$.

Решение (23) предсказывает изменение скорости центра масс свободного четырехмерного гироскопа при сохранении полной энергии системы и описывает пространственно-временную прецессию 4-D гироскопа ².

2.3 Предварительные эксперименты, подтверждающие пространственно-временную прецессию 4-D гироскопа

Мы наблюдали пространственно-временную прецессию 4-D гироскопа во время исследования абсолютно упругого удара корпуса гироскопа о стенку. В разных сериях экспериментов длительность удара составляла 0.02 - 0.05 сек.

На рис. 3 представлены графики, на которых наблюдается пространственно-временная прецессия, т.е. периодическое изменение скорости центра масс свободного 4-D гироскопа, до и после удара.

На рис. 3а на 4-D гироскоп действует внешняя сила до вертикальной черты. На графике видно, что когда под действием внешней силы корпус идет вперед, центр масс тоже идет вперед, при этом скорость центра масс превышает скорость корпуса. Затем внешняя сила перестает действовать (после вертикальной черты) и гироскоп свободно движется в направлении к стенке. При его свободном движении максимальная скорость корпуса становится больше скорости центра масс, при этом скорость центра масс осциллирует около некоторого среднего значения с амплитудой приблизительно 30 см/сек. Конечно, на 4-D, корпус которого через колеса связан с подстилающей поверхностью, действуют силы трения. Однако из графика на рис. 3а видно, что при движении корпуса вперед центр масс тоже движется вперед, в то время как силы трения должны были двигать в этом случае центр масс назад. Кроме того, пространственно-временная прецессия свободного гироскопа возникала только при определенных углах удара. Для других углов мы наблюдали постоянство скорости центра масс как до, так и после удара. На рис. 3б изображен тот же самый процесс, но с меньшей амплитудой.

Наконец, на рис. 3в мы видим пространственно-временную прецессию 4-D после удара. Представленные кривые необходимо рассматривать как предварительные экспериментальные результаты, который нуждаются не только в качественном, но и в количественном обосновании пространственно-временной прецессии свободного 4-D гироскопа.

²Это решение впервые было получено Сидоровым Андреем Николаевичем в начале 2003 года в Тайланде.

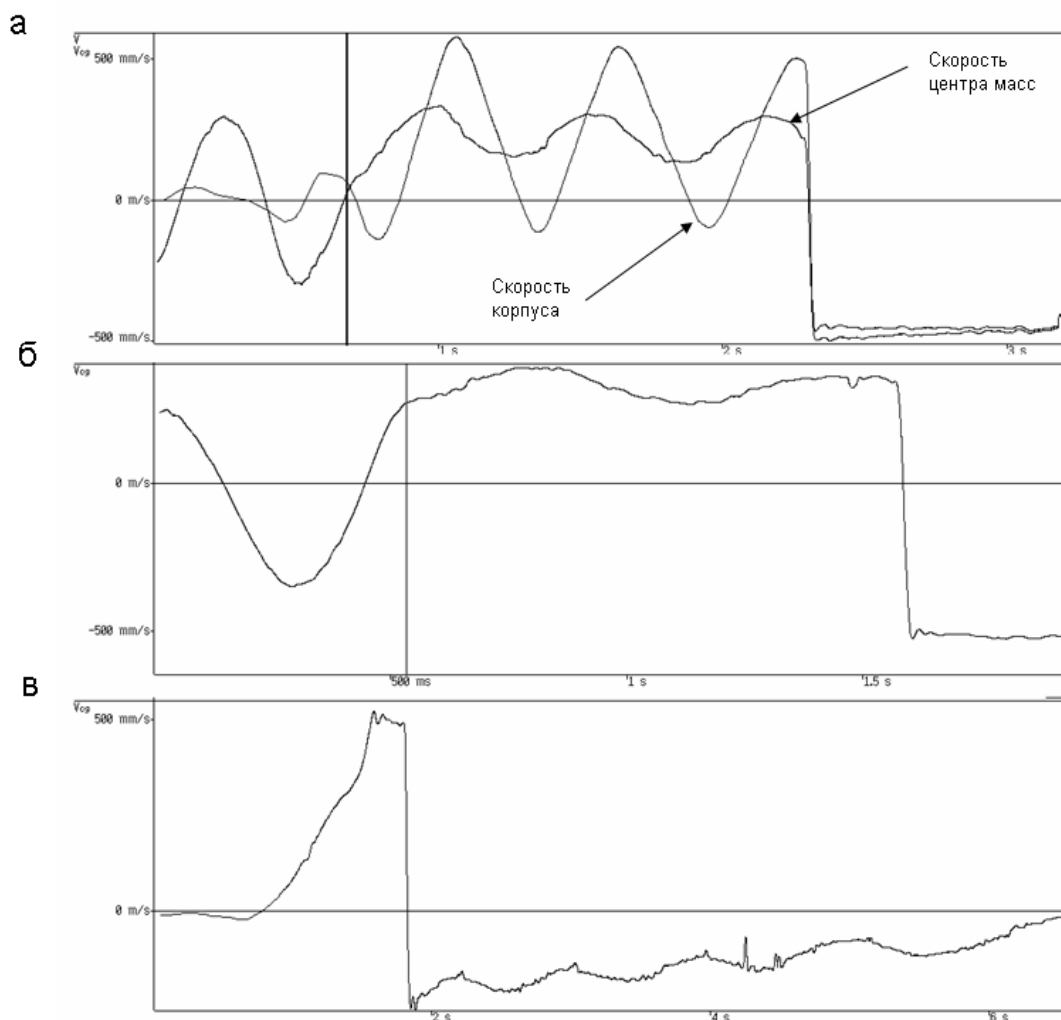


Рис. 3: Экспериментальные наблюдения пространственно-временной прецессии свободного 4-D гироскопа в плоскости $ct - x$ во время ударов корпуса о стенку: а) прецессия до удара (после вертикальной линии); б) тоже самое в другом эксперименте; в) прецессия после удара

Отметим следующие общие свойства пространственной прецессии 3-D гироскопа и пространственно-временной прецессии 4-D гироскопа.

- 1) и в том и другом случае необходимо предварительно подействовать на гироскоп внешней силой;
- 2) эффективность прецессии зависит от длительности воздействия (лучший эффект оказывает короткий удар);
- 3) прецессия гироскопа зависит от анизотропии пространства, созданной вращением гироскопа (для 4-D гироскопа, например, от угла удара).

3 Геометризация внешних сил

Мы уже знаем, что полная энергия 4-D гироскопа величина постоянная, поэтому для свободного гироскопа имеет место соотношение

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{v_c^2 + g'w^2} = \sqrt{\frac{T}{M + 2m}} = const,$$

где $\dot{s} = ds/dt = const$.

Предположим теперь, что на 4-D действуют внешние силы или моменты внешних сил. Тогда его полная энергия перестает быть постоянной величиной и, соответственно, метрика конфигурационного пространства не инвариантна, т.е.

$$\dot{s} = ds/dt \neq const.$$

Покажем, что в этом случае изменение метрики оказывается связанным с внешними силами и моментами внешних сил, что дает возможность дать им геометрическое описание.

Опуская скучные подробности, запишем уравнения движения 4-D гироскопа (15) и (16) в виде

$$\frac{dV_c}{ds} + \sqrt{g'} \frac{d\eta}{ds} \Omega = 0, \quad (24)$$

$$\frac{d\Omega}{ds} - \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\eta}{ds} V_c + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} \Omega^2 = 0. \quad (25)$$

Для того, чтобы найти соответствие уравнений (24) и (25) с уравнениями классической механики, перейдем в них к производным по времени. Учитывая, что

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{\dot{s}} \frac{d}{dt},$$

и $v_c = dx_c/dt$ и $w = r\omega = rd\phi/dt$, запишем уравнения (24) и (25) как

$$\frac{dv_c}{dt} + \sqrt{g'} \frac{d\eta}{dt} w - \frac{d \ln \dot{s}}{dt} v_c = 0, \quad (26)$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} w^2 - \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\eta}{dt} v_c - \frac{d \ln \dot{s}}{dt} w = 0. \quad (27)$$

Внимание!

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (17) и (18) можно увидеть, что они содержат дополнительные члены, которые отличны от нуля при условии, что полная энергия 4-D гироскопа меняется. Если энергия постоянна, то, как легко видеть, эти дополнительные члены обращаются в нуль.

Представим уравнения (26) и (27) в виде

$$\frac{dv_c}{dt} = A_x, \quad (28)$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} w^2 = A_{\phi'}, \quad (29)$$

где

$$A_x = -\sqrt{g'} \frac{d\eta}{dt} w + \frac{d \ln \dot{s}}{dt} v_c = \Phi(t)w + a_x, \quad (30)$$

- ускорение центра масс и

$$A_{\phi'} = \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\eta}{dt} v_c + \frac{d \ln \dot{s}}{dt} w = -\frac{1}{g'} \Phi(t)v_c + a_{\phi'}, \quad (31)$$

- угловое ускорение вращения грузов, причем ускорения

$$a_x = \frac{d \ln \dot{s}}{dt} v_c, \quad (32)$$

$$a_{\phi'} = \frac{d \ln \dot{s}}{dt} w. \quad (33)$$

порождены внешними силами и моментами внешних сил, соответственно. В самом деле, умножим (30) на v_c , а (31) на $g'w$ и результат сложим

$$\frac{d \ln \dot{s}}{dt} (v_c^2 + g'w^2) = a_x v_c + g' a_{\phi'} w$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d\dot{s}^2}{dt} = a_x v_c + g' a_{\phi'} w. \quad (34)$$

Умножая последнее соотношение на полную массу системы, имеем

$$\frac{dT(t)}{dt} = F_x v_c + F_{\phi'} w. \quad (35)$$

Это соотношение определяет закон изменения механической энергии 4-D гироскопа под действием внешних сил и моментов. Из него следует, что внешние силы

$$F_x = (M + 2m)a_x \quad (36)$$

и

$$F_{\phi'} = (M + 2m)g' a_{\phi'} \quad (37)$$

меняют энергию системы, в то время как силы инерции

$$F_1 = (M + 2m)\Phi w \quad (38)$$

и

$$F_2 = -(M + 2m)\frac{1}{g'}\Phi v_c \quad (39)$$

энергию системы не меняют. Однако роль этих сил в системе значительна - **сохраняя полную энергию, они обеспечивают распределение этой энергии системы на вращательную и "поступательную"**.

Учитывая соотношения (32) и (33) представим внешние силы и моменты через изменение метрики пространства

$$F_x = (M + 2m)a_x = (M + 2m)\frac{d \ln \dot{s}}{dt}v_c, \quad (40)$$

$$F_{\phi'} = (M + 2m)g'a_{\phi'} = \frac{d \ln \dot{s}}{dt}w. \quad (41)$$

Эти формулы показывают, что управляя внешними силами и моментами, действующими на 4-D гироскоп, можно управлять локальной метрикой конфигурационного пространства 4-D гироскопа. Кроме того, в механике Декарта мы имеем новый подход, позволяющий геометризовать силы, действующие на механическую систему - 4-D гироскоп.